

GPS における相対論補正

07-CNS-36-1

Feb. 26, 2005

電子航法研究所

GPS 受信機が測定した擬似距離により受信機位置を計算する際には、衛星クロックおよび位置について相対論的効果を補正する必要がある。この相対論補正の内容および大きさ、補正の方法について述べる。

1 相対論補正項

ICD-GPS-200C[1, p. 88] によれば、GPS 信号が送信された時刻 t は、C/A コードの位相から求められる時刻 t_{SV} と次の関係にある。

$$t = t_{SV} - \Delta t_{SV} \quad (1)$$

Δt_{SV} は衛星クロックに関する補正であって、

$$t_{SV} = a_{f0} + a_{f1}(t - t_{oc}) + a_{f2}(t - t_{oc})^2 + \Delta t_r \quad (2)$$

で与えられる。 $a_{f0}, a_{f1}, a_{f2}, t_{oc}$ は航法メッセージに含まれるクロック補正パラメータ、 Δt_r が衛星の移動速度に起因する相対論補正項である。これも ICD-GPS-200C[1, p. 88] に記載されており、

$$\Delta t_r = -\frac{2e\sqrt{\mu_e A}}{c^2} \sin E_k \quad (3)$$

とする。

相対論補正項 Δt_r の変化の様子を、図 1 に示す。これは、2004 年 7 月 1 日の PRN01 衛星について Δt_r をエフェメリス情報から計算した結果であって、最大値は ± 3.7 m 程度となることがわかる。

2 Sagnac 効果

GPS 衛星に関する相対論的效果としては、相対論補正 Δt_r （これは GPS 衛星の移動速度により衛星搭載クロックの進み方が変化することに原因がある）のほかに、Sagnac 効果と呼ばれるものがある。これは、GPS 衛星が送信した測距信号が受信機に到達するまでに地球が自転することによる影響であって、GPS の位置計算が一般に回転座標系により行われることに起因する。

受信機の位置を x とする（座標系はすべて ECEF 直交座標系による）。この受信機が時刻 t_r に受信した GPS 衛星 i の測距信号は、伝搬時間を無視して時刻 t_r に送信されたものとすれば、

$$x_i(t_r) \quad (4)$$

の位置から送信されたことになる。ところが、実際には 70 ms 程度の伝搬時間がかかることから、受信機が受信した信号は伝搬時間だけ過去の位置から送信されたものである。衛星と受信機との間の距離を r_i とすれば、送信時刻は

$$t_t = t_r - \frac{1}{c} r_i \quad (5)$$

である．エフェメリス情報から衛星位置を計算する過程では計算対象の時刻をこの t_t としなければならない．

さて，問題は，ECEF 直交座標系は回転座標系であるため，時刻 t_r と t_t では慣性座標系に対して座標軸が異なっていることである．すなわち，ECEF 座標系自体が地球の自転とともに回転しており，その回転角度は時刻 t_t と t_r の間に

$$\theta = \dot{\Omega}_e \frac{1}{c} r_i \quad (6)$$

である．

したがって，時刻 t_t における ECEF 座標系で表した時刻 t_t の衛星位置を $\mathbf{x}_i(t_t)$ とすれば，時刻 t_r における ECEF 座標系で表した時刻 t_r の衛星位置 $\mathbf{x}_i(t_r)$ は

$$\mathbf{x}_i(t_r) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_i(t_t) \quad (7)$$

と計算できる．地球自転による移動速度が赤道上で 462 m/s 程度であることから，Sagnac 効果により数 10 m 前後の影響がある．

なお，ICD-GPS-200C[1, p. 102, 20.3.3.4.3.4] では，衛星と受信機との間の距離を計算する場合に慣性座標系に変換するとよいことが述べられている．これは ECEF 座標系が信号伝搬中に回転していることによる影響であって，上述の方法で補正するのと同じ結果を与える．

Sagnac 効果による距離の計算誤差の例を，図 2 に示す．これは，衛星と受信機との間の距離を，信号伝搬中の ECEF 座標系の回転を考慮せずに計算した場合 (psr_0) と考慮して計算した場合 (psr_{TRUE}) の差であって，Sagnac 効果を意味している．2004 年 7 月 1 日の PRN01 衛星について，エフェメリス情報をもとに調布市 (35.67952647N, 139.56139515E, 楕円体高 109.918m) における値を計算した．

参考文献

- [1] *Navstar GPS Space Segment / Navigation User Interfaces*, Interface Control Document, ICD-GPS-200, Rev. C, Oct. 1993.

担当：CNS 領域 坂井 (END)

図 1: 相対論補正項 (2004 年 7 月 1 日, PRN01) .

図 2: Sagnac 効果 (2004 年 7 月 1 日, PRN01) .