

## 6. 平行RNAV（広域航法）到着経路の横方向重畳確率の推定

航空交通管理領域 ※藤田 雅人、天井 治

### 1. まえがき

航空機の衝突防止のため、管制間隔基準が定められている。管制間隔基準が一定の安全性を保証しなければ、管制間隔の意味がない。管制間隔が意図された安全性を担保しているかを確認するため、管制間隔の安全性推定が必要となる。

航空機の衝突リスクは単位飛行時間あたりの事故件数（1衝突を2事故として計算）で表されることが多い。衝突リスクの推定値があらかじめ設定された許容リスク（Target Level of Safety, TLS）を超えないとき安全であると推定する。TLSは $5.0 \times 10^{-9}$  [件/飛行時間]が用いられることが多い。

平行経路を飛行する航空機の横方向喪失に起因する衝突リスクは次の式で推定される。<sup>[1]</sup>

$$N_{ay} = P_z(0)P_y(S_y)(N_x^y(o)K(o) + N_x^y(s)K(s)) \quad (1)$$

ここで、各々の記号の意味は以下の通りである。  
 $P_z(0)$  : 同じフライトレベルを指定された航空機が垂直方向で重なる確率。

$P_y(S_y)$  :  $S_y$ （海里）離れた平行経路を割り当てられた航空機が横方向で重なる確率。横方向重畳確率と呼ばれる。

$N_x^y(s)$  : 同方向に飛行する航空機対が進行方向ですれ違う頻度。

$N_x^y(o)$  : 逆方向に飛行する航空機対が進行方向ですれ違う頻度。

$K(s), K(o)$  : 航空機の平均サイズ、相対速度から決まる定数。

本論文では、鹿児島空港のRNAV到着経路での経路逸脱量を調査した参考文献[2]の結果をもとに横方向重畳確率 $P_y(S_y)$ を推定する方法を概説する。

### 2. 経路逸脱量の分布

#### 2.1 経路逸脱の要因

航空機は割り当て経路から逸脱して飛行することがある。管制システムは人的要因（パイ

ロット、管制官など）・機械的要因（航空機・航法援助施設・通信施設など）が複雑に絡み合ったシステムであり、航空機が経路から逸脱する原因も航法誤差、人的過誤等、多彩であると考えられる。また、経路からの逸脱がそれらの要因の複数の連鎖によって引き起こされることもある。全ての要因を考察し、それをもとに航空機の経路からの逸脱量を推定することは不可能である。したがって、我々は観測される航空機の経路からの逸脱量の分布を管制システムの総合的な性能を表すものと考え、それをもとに経路逸脱量を推定するという手法を採用している。

しかし、短い観測期間内に得られるデータは少ない。小さな経路逸脱は観測されるが、大きな経路逸脱が観測されることはほとんどない。管制指示により十分な間隔が設定されている航空機の衝突事故は大きな逸脱によって引き起こされる。大きな逸脱の安全性に対するインパクトを考えると、短期間の観測の結果、大きな逸脱が観測されなかったからといって、将来にも大きな逸脱が発生しないと考え、リスク推定を行うのは不適當である。したがって、与えられたデータから大きな経路逸脱がどの程度の頻度で発生するかを推定する技術が必要となる。

#### 2.2 経路逸脱を表す確率密度関数の形

経路逸脱量  $x$ （単位は海里）を確率変数と考え、その確率密度関数を  $f(x)$ （単位は1/海里）とおく。（確率論に詳しくない読者は付録1を参照のこと。）歴史的経緯から確率密度関数  $f(x)$  は通常の航法誤差等の「通常のエラー」に起因する経路逸脱を表す確率密度関数  $f_{\text{typical}}(x)$  とそれ以外の何らかの過誤（以下、「通常でないエラー」と呼ぶ）に起因する経路逸脱を表す確率密度関数  $f_{\text{atypical}}(x)$  の線形結合として表されることが多い。

$$f(x) = (1 - \alpha)f_{\text{typical}}(x) + \alpha f_{\text{atypical}}(x) \quad (2)$$

ただし、係数 $\alpha$ は次の不等式を満たす。

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad (3)$$

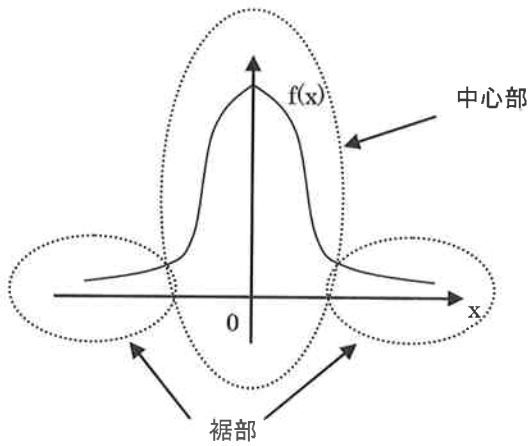


図1 分布の中心部・裾部

通常のエラーに起因する経路逸脱は小さい。したがって、 $f_{\text{typical}}(x)$ は  $f(x)$ の中心部（図1参照）を主に表しているべきである。したがって、 $x=0$ の近くでは大きな値を取るものの、 $f(x)$ の裾部（図1参照）では0に近いことが期待される。

一方、通常でないエラーに起因する経路逸脱の発生頻度は通常のエラーのそれに比して少ない。したがって、係数 $\alpha$ は非常に小さいことが期待される。

また、 $f_{\text{typical}}(x)$ は裾部で0に近いので、必然的に  $f_{\text{typical}}(x)$ が  $f(x)$ の裾部を主に表すこととなる。

### 2.3 $f_{\text{typical}}(x)$ のモデル

鹿児島空港の RNAV 到着経路での経路逸脱量を調査した[2]では標本数が 2,298 と少なく、絶対値で 0.4NM を超える大きな経路逸脱は観測されなかった。したがって、鹿児島空港で得られたデータは中心部しか観測されなかったと推定するのが妥当である。[2]で与えられた実測データに当てはめた分布

$$f_{\text{fitted}}(x) = (1 - \alpha_c)N(x; \sigma_{c,1}) + \alpha_c N(x; \sigma_{c,2}) \quad (4)$$

は主に中心部を代表しているので、先に述べた考察から、

$$f_{\text{typical}}(x) = f_{\text{fitted}}(x) \quad (5)$$

とみなす。ここで、関数  $N(x; \sigma)$ は正規分布の確率密度関数

$$N(x; \sigma) = \frac{\exp(-x^2 / 2\sigma^2)}{\sqrt{2\pi}\sigma} \quad (6)$$

であり、

$$\alpha_c = 0.117 \quad (7)$$

$$\sigma_{c,1} = 0.0673(\text{海里}) \quad (8)$$

$$\sigma_{c,2} = 0.129(\text{海里}) \quad (9)$$

である。

### 2.4 $f_{\text{atypical}}(x)$ のモデル

鹿児島の RNAV 到着経路は現在使われておらず、現在のところ、データを収集することが出来ない。このため、データ収集により(2)式の  $\alpha$ 及び  $f_{\text{atypical}}(x)$ を推定することは期待できない。この状況下で横方向重畳確率  $P_y(S_y)$ を求める必要がある。したがって、「適当な」 $\alpha$ 及び  $f_{\text{atypical}}(x)$ を選ばざるを得ない。その選択に当たって、「保守性の原則」を適用する。これは、「衝突リスク推定値の過大評価は良いが、過小評価は認められない」とするものである。式(1)に見られるように、衝突リスク  $N_{ay}$ は横方向重畳確率  $P_y(S_y)$ に比例する。そこで、「保守性の原則」にしたがって、 $P_y(S_y)$ を最大にする $\alpha$ 及び  $f_{\text{atypical}}(x)$ を選択する。

慣例に従って、 $f_{\text{atypical}}(x)$ は両側指数分布

$$DE(x; \lambda) = \frac{\exp(-|x|/\lambda)}{2\lambda} \quad (10)$$

に従うものとする。言い換えると、

$$f_{\text{atypical}}(x) = DE(x; \lambda) \quad (11)$$

である。ここで、 $\lambda$ は分布の広がり度合いを表すパラメータである。式(4),(10)から式(2)は以下のように変形される。

$$f(x) = (1 - \alpha)((1 - \alpha_c)N(x; \sigma_{c,1}) + \alpha_c N(x; \sigma_{c,2})) + \alpha DE(x; \lambda) \quad (12)$$

$\alpha$ 及び $\lambda$ は未定パラメータであり、 $\alpha_c$ 、 $\sigma_{c,1}$ 、 $\sigma_{c,2}$ は式(7)・(9)で与えられる定数である。

### 2.5 技術的な仮定

いくつか技術的な仮定を導入する。 $f_{\text{atypical}}(x)$ が  $f(x)$ の裾部を主に表すことから、 $f_{\text{atypical}}(x)$ が表す確率分布の標準偏差  $2\lambda$ は  $f_{\text{atypical}}(x)$ が表す確

率分布の標準偏差  $\sqrt{(1-\alpha_c)^2 \cdot \sigma_{c,1}^2 + \alpha_c^2 \cdot \sigma_{c,2}^2}$  より大きいと仮定する。また、 $\lambda \leq 1000$ [海里]であると仮定する。これは、通常でないエラーに起因する経路逸脱でも 95%の確率で 1300 海里以内であることを表しており、妥当な仮定であると考えられる。以上の仮定をまとめると次の不等式で表される。

$$\frac{\sqrt{(1-\alpha_c)^2 \cdot \sigma_{c,1}^2 + \alpha_c^2 \cdot \sigma_{c,2}^2}}{2} \leq \lambda \leq 1000 \quad (13)$$

### 3. 航法精度の要件 (RNAV-X)

RNAV-X は航法精度を表し、RNAV-X 承認機は経路の中心線から X(海里)を全飛行時間の 95%以上の確率で飛行可能な航法精度を有する。式で表すと、以下のようになる。

$$\int_{-X}^X f(x) dx \geq 0.95 \quad (14)$$

RNAV 到着経路を飛行する航空機には RNAV-1 相当の航法精度が義務付けられている。一方、[2]で得られたデータから推定すると、鹿児島空港 RNAV 到着経路を飛行する航空機は RNAV-0.1725 程度に相当する航法精度を有していると推定される。

式(14)も式(3)、(13)と同様に  $P_y(S_y)$ の最大値を求めるときの制限式となる。本稿では式(14)の X が

$$X=1 \quad (15)$$

$$X=0.1725 \quad (16)$$

のときの  $P_y(S_y)$ の最大値を求める。

式(14)の左辺を変形する。

$$\int_{-X}^X f(x) dx = (1-\alpha) \int_{-X}^X f_{\text{typical}}(x) dx + \alpha \int_{-X}^X f_{\text{atypical}}(x) dx \quad (17)$$

$$= (1-\alpha)C_X + \alpha(1-\exp(-X/\lambda))$$

ここで、

$$C_X = \int_{-X}^X f_{\text{typical}}(x) dx \quad (18)$$

とおいたが、これは X の値によって決まる定数である。

式(14)、(17)より、

$$\alpha \leq \frac{C_X - 0.95}{\exp(-X/\lambda) - (1 - C_X)} \quad (19)$$

である。

## 4. $P_y(S_y)$ の最大値の計算

### 4.1 縦方向重畳確率

横方向重畳確率  $P_y(S_y)$ は以下の式で計算される。

$$P_y(S_y) = \int_{S_y - \lambda_y}^{S_y + \lambda_y} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) \cdot f(s) ds dx \quad (20)$$

ただし、 $\lambda_y$  は航空機の平均翼長であり、

$$\lambda_y = 0.032 \text{ [海里]} \quad (21)$$

である。式(2)を代入すると次の式を得る。

$$P_y(S_y) = \int_{S_y - \lambda_y}^{S_y + \lambda_y} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) \cdot f(s) ds dx$$

$$= (1-\alpha)^2 \int_{S_y - \lambda_y}^{S_y + \lambda_y} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{typical}}(x-s) \cdot f_{\text{typical}}(s) ds dx \quad (22)$$

$$+ 2\alpha(1-\alpha) \int_{S_y - \lambda_y}^{S_y + \lambda_y} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{typical}}(x-s) \cdot f_{\text{atypical}}(s) ds dx$$

$$+ \alpha^2 \int_{S_y - \lambda_y}^{S_y + \lambda_y} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{atypical}}(x-s) \cdot f_{\text{atypical}}(s) ds dx$$

計算過程に興味のない方は以下の 4.2、4.3 節を飛ばしても構わない。

### 4.2 式(22)の第一項の計算

式(22)の第一項の積分は以下のように展開される。

$$\int_{S_y - \lambda_y}^{S_y + \lambda_y} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{typical}}(x-s) \cdot f_{\text{typical}}(s) ds dx$$

$$= (1-\alpha_c)^2 \int_{S_y - \lambda_y}^{S_y + \lambda_y} \int_{-\infty}^{\infty} N(x-s; \sigma_{c,1}) \cdot N(s; \sigma_{c,1}) ds dx \quad (23)$$

$$+ 2\alpha_c(1-\alpha_c) \int_{S_y - \lambda_y}^{S_y + \lambda_y} \int_{-\infty}^{\infty} N(x-s; \sigma_{c,1}) \cdot N(s; \sigma_{c,2}) ds dx$$

$$+ \alpha_c^2 \int_{S_y - \lambda_y}^{S_y + \lambda_y} \int_{-\infty}^{\infty} N(x-s; \sigma_{c,2}) \cdot N(s; \sigma_{c,2}) ds dx$$

計算ソフト Mathematica<sup>[3]</sup>を用いたところ、 $S_y=3, \dots, 10$  に対して以下の不等号が確認できた。

$$\int_{S_y - \lambda_y}^{S_y + \lambda_y} \int_{-\infty}^{\infty} N(x-s; \sigma_{c,i}) \cdot N(s; \sigma_{c,j}) ds dx < 1.0 \times 10^{-100}$$

$$((i,j)=(1,1), (1,2), (2,2)) \quad (24)$$

後に紹介する他項の計算結果と比較すると、これは十分小さく、

$$\int_{S_y - \lambda_y}^{S_y + \lambda_y} \int_{-\infty}^{\infty} N(x-s; \sigma_{c,i}) \cdot N(s; \sigma_{c,j}) ds dx \cong 0 \quad (25)$$

と仮定しても差し支えない。従って、式(22)の第一項は0であるとみなして差し支えない。

### 4.3 式(22)の第二項の計算

式(22)の第二項の積分は以下のように展開される。

$$\int_{S_y-\lambda_y}^{S_y+\lambda_y} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{typical}}(x-s) \cdot f_{\text{atypical}}(s; \lambda) ds dx$$

$$= (1-\alpha_c) \int_{S_y-\lambda_y}^{S_y+\lambda_y} \int_{-\infty}^{\infty} N(x-s; \sigma_{c,1}) \cdot DE(s; \lambda) ds dx$$

$$+ \alpha_c \int_{S_y-\lambda_y}^{S_y+\lambda_y} \int_{-\infty}^{\infty} N(x-s; \sigma_{c,2}) \cdot DE(s; \lambda) ds dx \quad (26)$$

便宜上、

$$h(x; \sigma, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} N(x-s; \sigma) \cdot DE(s; \lambda) ds \quad (27)$$

とおく。積分計算により、次の式を得る。

$$h(x; \sigma, \lambda) = \frac{\exp(-\frac{x}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2})}{4\lambda} \left[ 1 - \text{sign}(-\frac{x}{\sigma^2} + \frac{1}{\lambda}) \text{erf}(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}(-\frac{x}{\sigma^2} + \frac{1}{\lambda})) \right]$$

$$+ \frac{\exp(\frac{x}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2})}{4\lambda} \left[ 1 - \text{sign}(\frac{x}{\sigma^2} + \frac{1}{\lambda}) \text{erf}(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}(\frac{x}{\sigma^2} + \frac{1}{\lambda})) \right] \quad (28)$$

$\lambda_y$  は式(21)に見られるとおり、 $S_y$  に対し、非常に小さい値であるので、区間  $[S_y-\lambda_y, S_y+\lambda_y]$  上、次の定数関数で近似できると考える。

$$h(x; \sigma, \lambda) \cong h(S_y; \sigma, \lambda) \quad (29)$$

さらに、 $S_y=3,4,\dots,10$  に対して、 $\lambda=0.013$  から  $0.01$  刻みに  $1000$  まで  $h(S_y; \sigma_{c,i}, \lambda)$  の値を計算したところ、次の関係が確認できた。

$$h(S_y; \sigma_{c,i}, \lambda) < 1.0 \times 10^{-100} \quad (i=1,2) \quad (30)$$

故に、

$$h(S_y; \sigma_{c,i}, \lambda) \cong 0 \quad (31)$$

と仮定して差し支えない。

式(26)の右辺の各項の被積分関数は式(31)より  $0$  とみなすので、式(22)の第二項は  $0$  であるとみなして差し支えない。

#### 4.4 $P_y(S_y)$ の最大値の導出 ( $\lambda$ の関数として)

4.2, 4.3 節で見たように(22)式の右辺の第一項、第二項は  $10^{-100}$  より小さく、ほとんど  $0$  に等しい。よって次式を得る。

$$P_y(S_y) \cong \alpha^2 \int_{S_y-\lambda_y}^{S_y+\lambda_y} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{atypical}}(x-s) \cdot f_{\text{atypical}}(s) ds dx \quad (32)$$

式(32)より、 $\alpha$  が最大するとき  $P_y(S_y)$  も最大値を取る。条件式(3)及び(19)から、

$$\alpha \leq \min(1, \frac{C_X - 0.95}{\exp(-X/\lambda) - (1 - C_X)}) \quad (33)$$

が成立するので、 $P_y(S_y)$  が最大値を取るとき  $\alpha$  は以下の式で表される。

$$\alpha = \min(1, \frac{C_X - 0.95}{\exp(-X/\lambda) - (1 - C_X)}) \quad (34)$$

従って、 $P_y(S_y)$  の最大値は次の式で表される。

$$\max_{\alpha} P_y(S_y) \cong \left( \min(1, \frac{C_X - 0.95}{\exp(-X/\lambda) - (1 - C_X)}) \right)^2 \times \quad (35)$$

$$\int_{S_y-\lambda_y}^{S_y+\lambda_y} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{atypical}}(x-s) \cdot f_{\text{atypical}}(s) ds dx$$

ただし、 $\max_{\alpha} P_y(S_y)$  は  $\lambda$  の関数であること、及び、

$$\int_{S_y-\lambda_y}^{S_y+\lambda_y} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{atypical}}(x-s) \cdot f_{\text{atypical}}(s) ds dx$$

$$= \int_{S_y-\lambda_y}^{S_y+\lambda_y} \int_{-\infty}^{\infty} DE(x-s; \lambda) \cdot DE(s; \lambda) ds dx$$

$$= \frac{\exp(-\frac{S_y-\lambda_y}{\lambda})(2\lambda+S_y-\lambda_y) - \exp(-\frac{S_y+\lambda_y}{\lambda})(2\lambda+S_y+\lambda_y)}{8\lambda} \quad (36)$$

であることに注意。

#### 4.5 $P_y(S_y)$ の最大値の導出

まず、条件式(13)を満たし、 $\max_{\alpha} P_y(S_y)$  を最大にする  $\lambda$  の値  $\lambda_0$  を求める方法を説明する。具体例については付録2を参照のこと。

$X, S_y$  が与えられたとき、式(35)を用いて  $\max_{\alpha} P_y(S_y)$  のグラフを描く。そのグラフから  $\lambda_0$  のある範囲を予測する。そして、 $\max_{\alpha} P_y(S_y)$  の右辺の  $\lambda$  に対する微分  $d \max_{\alpha} P_y(S_y) / d\lambda$  を計算し、 $\lambda_0$  がある辺りの  $dP_y(S_y) / d\lambda$  の零点をニュートン法により求める。その零点が  $\lambda_0$  に他ならない。

$\lambda_0$  が求めれば、式(34)・(36)に  $\lambda=\lambda_0$  を代入すれば、 $P_y(S_y)$  が最大値ならびにそのときの  $\alpha$  の値が求まる。表1と表2にそれぞれ  $X=1$  と  $X=0.1725$  のときの計算結果を示す。

表1:  $X=1$  (RNAV1) のときの  $P_y(S_y)$  の最大値

$S_y$	$\lambda$	$\alpha$	$\max P_y(S_y)$
3	0.51	0.3557	$7.60 \times 10^{-5}$
4	1.11	0.1232	$2.74 \times 10^{-5}$
5	1.71	0.0897	$1.59 \times 10^{-5}$
6	2.32	0.0770	$1.10 \times 10^{-5}$
7	2.93	0.0704	$8.40 \times 10^{-6}$
8	3.54	0.0663	$6.76 \times 10^{-6}$

9	4.15	0.0636	5.65 x10 <sup>-6</sup>
10	4.77	0.0617	4.85 x10 <sup>-6</sup>

表2: X=0.1725(RNAV0.1725)のときの  $P_y(S_y)$  の最大値

$S_y$	$\lambda$	$\alpha$	$\max P_y(S_y)$
3	1.59	0.0227	2.26 x10 <sup>-6</sup>
4	2.21	0.0220	1.61 x10 <sup>-6</sup>
5	2.83	0.0216	1.24 x10 <sup>-6</sup>
6	3.45	0.0213	1.02 x10 <sup>-6</sup>
7	4.07	0.0212	8.58 x10 <sup>-7</sup>
8	4.69	0.0210	7.43 x10 <sup>-7</sup>
9	5.30	0.0210	6.54 x10 <sup>-7</sup>
10	5.92	0.0209	5.85 x10 <sup>-7</sup>

## 5. まとめ

本論文では、[2]で得た横方向逸脱量の分布が通常のエラーに起因する経路逸脱の分布を表しているという仮定の下に、RNAV X 条件下での横方向重畳確率の最大値を求めた。(X=0.1725, X=1)

大まかに言って、X=1 の場合の  $\max P_y(S_y)$  の値は X=0.1725 のときの 8 倍程度になっている。仮に洋上航空路の交通流[4]を考えた場合でも、X=1 のときは  $\max P_y(S_y)$  があまりに大きいため許容リスク (TLS) を満たすことは不可能に思われる。洋上よりも交通量が多いターミナル空域で TLS を満たすことはさらに難しいと考えられる。一方、実際の航法精度を考えて  $\max P_y(S_y)$  を求める時 (X=0.1725 のとき) には制約条件として (99%値や 99.9%値ではなく) 95%値を用いる必然性が感じられない。しかし、このような制約条件を課さなければ、 $\alpha=1$  のときに  $P_y(S_y)$  は最大値を取ることとなり、2.2 節で述べた内容と反する。

RNAV 1 条件は実際の航法精度を反映しておらず、 $5.0 \times 10^{-9}$  という非常に小さな TLS を満たすには、あまりに制約が緩いようである。RNAV 到着経路を航行する航法精度に関する要件について、更なる議論が必要と思われる。

## 参考文献

[1] Reich, P.G., Analysis of Long Range Air

Traffic Systems – Separation Standards I, II & III, Journal of the Institute of Navigation, Vol.19, Nos.1, 2 & 3, 1966

[2] 天井、藤田：RNAV（広域航法）到着経路における航空機の横方向の航法精度の推定、平成19年度（第7回）電子航法研究所研究発表会 講演概要

[3] Wolfram, S, Mathematica – A Sytem for Doing Mathematics by Computer– 2<sup>nd</sup> ed. Addison-Wesley Pub. Co., 1992.

[4] 天井、藤田：洋上航空路における近接通過頻度の長期的変化、平成15年度（第3回）電子航法研究所研究発表会 講演概要

[5] 統計学入門、東京大学教養学部統計学教室編、東京大学出版会、1991

（付録1）確率密度関数とは…[5]

考えている事象のうち条件に当てはまる事象の数を、考えている事象全体の数でわるという確率の定義を「ラプラスの定義」という。ラプラスの定義で確率が計算できるのは考えている事象の数が有限個のときのみである。

しかし、経路逸脱量  $x$  を考えるとき、考えている事象は無限個ある。したがって、ラプラスの定義で確率を定義することが出来ない。このような場合でも、「確率の公理主義的定義」で確率が定義できる。

経路逸脱量のように実数値を取りうる値の確率を定義するときには、起こりやすさを表す関数  $f(x)$  を使う。 $f(x)$  は

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad (37)$$

を満たさなければならない。そして、 $x$  の値が  $a$  以上  $b$  未満である確率を

$$\int_a^b f(x) dx \quad (38)$$

で定義する。このような関数  $f(x)$  を確率密度関数と呼んでいる。

（付録2） $\max_{\alpha} P_y(S_y)$  を最大にする  $\lambda$  の値の導出  
X=0.1725(海里),  $S_y=3$ (海里) のときに  $\max_{\alpha} P_y(S_y)$  を最大にする  $\lambda$  の値  $\lambda_0$  の導出方法を説明する。X と  $S_y$  の値が異なるときも同様に導くことが出来る。

まず、 $\lambda$  に対する  $\max_{\alpha} P_y(S_y)$  のグラフを

$\sqrt{(1-\alpha_c)^2 \cdot \sigma_{c,1}^2 + \alpha_c^2 \cdot \sigma_{c,2}^2} / 2 \leq \lambda \leq 1000$  の範囲で書く。

図2が Mathematica で描いたグラフである。

$\sqrt{(1-\alpha_c)^2 \cdot \sigma_{c,1}^2 + \alpha_c^2 \cdot \sigma_{c,2}^2} / 2 \leq \lambda \leq 100$  で最大値を取る

ことが見て取れる。

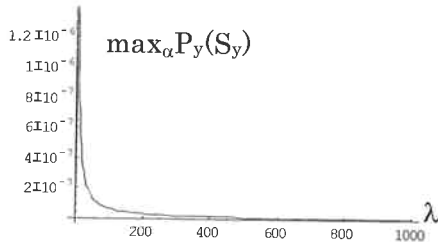


図2  $\max_{\alpha} P_Y(S_Y)$  の推移

$$\left( \sqrt{(1-\alpha_c)^2 \cdot \sigma_{c,1}^2 + \alpha_c^2 \cdot \sigma_{c,2}^2} / 2 \leq \lambda \leq 1000 \right)$$

次に  $\sqrt{(1-\alpha_c)^2 \cdot \sigma_{c,1}^2 + \alpha_c^2 \cdot \sigma_{c,2}^2} / 2 \leq \lambda \leq 100$  の範囲で

$\max_{\alpha} P_Y(S_Y)$  のグラフ (図3) を書く。

$\sqrt{(1-\alpha_c)^2 \cdot \sigma_{c,1}^2 + \alpha_c^2 \cdot \sigma_{c,2}^2} / 2 \leq \lambda \leq 10$  の範囲で最大を取

ることが見て取れる。

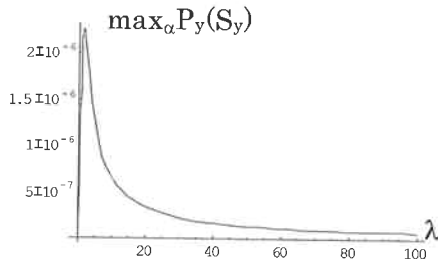


図3  $\max_{\alpha} P_Y(S_Y)$  の値の推移

$$\left( \sqrt{(1-\alpha_c)^2 \cdot \sigma_{c,1}^2 + \alpha_c^2 \cdot \sigma_{c,2}^2} / 2 \leq \lambda \leq 100 \right)$$

$\sqrt{(1-\alpha_c)^2 \cdot \sigma_{c,1}^2 + \alpha_c^2 \cdot \sigma_{c,2}^2} / 2 \leq \lambda \leq 10$  の範囲で

$\max_{\alpha} P_Y(S_Y)$  のグラフ (図4) を書く。  $1 \leq \lambda \leq 3$  の範囲で最大を取ることが見て取れる。

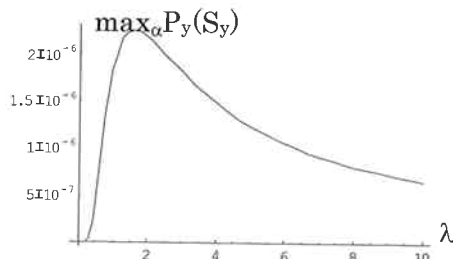


図4  $\max_{\alpha} P_Y(S_Y)$  の値の推移

$$\left( \sqrt{(1-\alpha_c)^2 \cdot \sigma_{c,1}^2 + \alpha_c^2 \cdot \sigma_{c,2}^2} / 2 \leq \lambda \leq 10 \right)$$

$1 \leq \lambda \leq 3$  のとき、式(19)の右辺は1より小さく、

$$\min\left(1, \frac{C_X - 0.95}{\exp(-X/\lambda) - (1 - C_X)}\right) \quad (39)$$

$$= \frac{C_X - 0.95}{\exp(-X/\lambda) - (1 - C_X)}$$

である。式(36)及び式(39)を式(35)に代入して  $1 \leq \lambda \leq 3$  のときの  $\max_{\alpha} P_Y(S_Y)$  の式を得る。そして、 $dP_Y(S_Y)/d\lambda$  を Mathematica により求め、Simplify コマンドで  $dP_Y(S_Y)/d\lambda$  の式を簡略化する (図5)。もとめた  $dP_Y(S_Y)/d\lambda$  の分子部分の零点をニュートン法(Mathematica では FindRoot コマンド)により求める (図6)。  $\lambda = 1.59$  を得る。

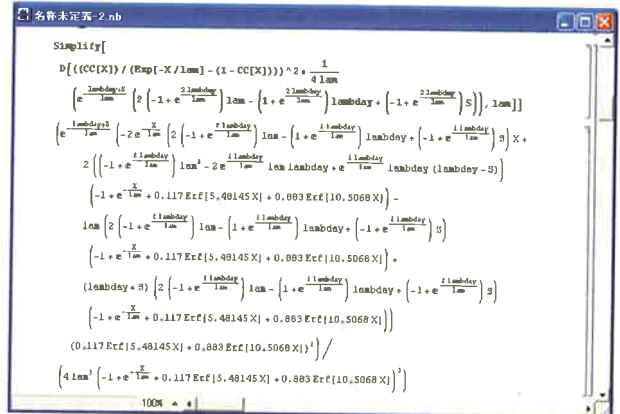


図5  $dP_Y(S_Y)/d\lambda$  を求める

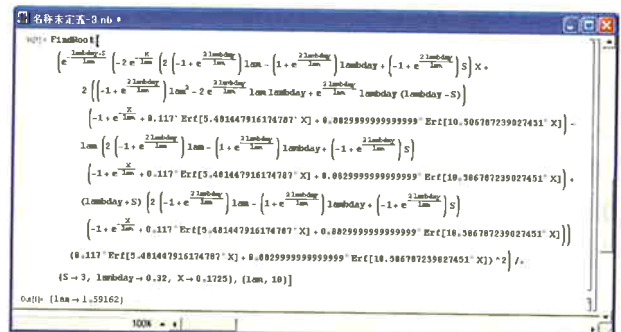


図6 Newton法